

ОПИСАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ АГРЕССИВНЫХ ИНВАЗИЙ

А.Ю. Переварюха, В.В. Михайлов, И.В. Трофимова

Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН, г. Санкт-Петербург
temp_elf@mail.ru, mwwcari@mail.ru, ivsoloveva@mail.ru

Аннотация. Обсуждается малоизученная проблема сущностной интерпретируемости поведения класса вычислительных моделей, которые применяются для прогнозирования инвазий чужеродных видов. Решается проблема создания непротиворечивого метода вычислительного моделирования для экологических процессов со стадийностью и критическими трансформациями. Подобные модели обладают разнообразным поведением с возникновением бифуркаций, появлением четных и нечетных циклов и в пределе усложнения циклического поведения хаотизацией траектории.

В экодинамике сосуществование нелинейных эффектов оказывается противоречиво. При прогнозировании динамики инвазионных процессов с учетом регулирующего воздействия итерационные модели генерируют ненужные нелинейные режимы поведения. Нами обосновано, что связанные в один сценарий бифуркации не имеют объяснений в экологической реальности и не отображаются в наблюдаемых инвазионных процессах. Разработанные гибридные модели жизненного цикла со стадиями развития укладываются в предложенные нами критерии сущностной интерпретации в экологии и прогнозирования инвазионных процессов в биосистемах, что характерно для вселенцев Каспийского моря.

Ключевые слова: динамические модели биофизических процессов, теория универсальности Фейгенбаума и ренормализации группы, переменные темпы развития и роста, альтернативные аттракторы, сложные динамические процессы, регуляции воздействия для биосистем, гибридные вычислительные системы, каскады бифуркаций, хаотизация, параметрические диапазоны, теория сущностной интерпретации.

Для задач биологической кибернетики нами последовательно развивается метод организации базовой модели для быстро меняющихся процессов. Например, расчета формирования пополнения биоресурсов (запасов краба или трески) в форме системы уравнений взаимосвязанной убыли численности и темпов роста. Основная идея формализации процесса формирования пополнения заключается в описании убыли начальной численности поколения $N(0)$ от момента выхода из икринок дифференциальным уравнением с переопределяемой структурой правой части на кадрированном промежутке времени $[0, T]$. Так мы учитывали разные факторы смертности и её изменение по мере развития особей последовательно на стадиях развития, которые мы отразили в предикативно переопределяемой вычислительной структуре уравнений:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + U[x]\beta) N(t), & t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau) / w(\tau) + \beta) N(t), & t > \tau, w(t) < w_{D2} \\ -\alpha_2 w(t)N^2(t), & w(t) < w_{D3} \end{cases}, \quad (1)$$

где α – коэффициент зависящей от плотности компенсационной смертности; β – коэффициент нейтральной убыли. От абстрактного «репродуктивного потенциала» разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости λ , оцениваемой по данным мониторинга. Начальные условия для уравнений: $N(0) = \lambda S$. Время τ – длительность первой стадии с эндогенным питанием, для лососевых рыб в среднем составляет 7–9 сут. w_D – условный уровень развития, при достижении которого меняется действие факторов смертности, что интерпретируется экологией обитания молоди при уже самостоятельной миграции рыб. Для случая бассейнового выращивания осетровых рыб вместо величины w (τ) в знаменателе второй формы мы предполагаем существенную роль запаздывания на третьей стадии развития $N(t - \zeta)$. Величина $U[x]$ – в модели (1) особый триггерный функционал с ограниченной областью значений. Смысл предложенного нами метода функционалов – выразить влияния экстремальных условий для особых состояний биосистем с пороговыми

трансформациями при инвазиях чужеродных видов, агрессивно воздействующих на среду размножения.

Прерывистость инвазионных процессов и гибридное время. Исходя из того, что жизненный цикл стандартной длины T организма у рыб и насекомых сопровождают метаморфозы, мы задали в модели разбиение их жизненного цикла. Используем кадрирование иерархии непрерывных отрезков времени. Внутри больших кадров оставим место для пронумерованных событий t^i . Гибридное событийное время формализуем в форме мультикортежа вложенных множеств из упорядоченных элементов:

$$\bigcup_n \left\{ \partial L_n, \left\{ \bigcup_i [t_0, t^i, t^{i+1}, T] \right\}, \partial R_n \right\},$$

где i – номер события в фиксированном интервале для каждого i -го кадра. В гибридном формате времени с событиями n – номер кадра в порядке поколений. Запись времени с двумя дискретными компонентами оставляет грани $\{\partial L, \partial R\}$ справа и слева от основной единицы – кадра с номером n . Можно сделать кадры времени с плавающими границами.

Вариативность метода организации гибридных структур. Помимо использования гибридной модели (1) для описания ситуации коллапса запасов камчатского краба гибридную структуру удалось к прогнозированию других сложных стадийных биофизических процессов – вспышек инвазионных видов и распространения новых инфекций. Проведем построение вычислительной модели для специфичной ситуации в динамике опасных инвазионных насекомых. Предложено, что скорость роста $w(t)$ находится в обратной зависимости от численности поколения, но не в обратно пропорциональной, а дробно-стенной и действует до перехода на активное питание из-за увеличения пищевых потребностей малоподвижных личинок. Убыль численности поколения инвазионного вида $N(t)$ на интервале модельного времени с $[0, T]$ опишут объединенные в систему два дифференциальных уравнения (α, β, c – константы):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\sqrt{N^k(t)} + \zeta} \end{cases}, \quad (2)$$

где: S – величина доли родительской части популяции; $w(t)$ – отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; g – параметр, учитывающий ограниченность количества доступных для личинок кормовых объектов. ζ – параметр, ограничивающий темп развития вне зависимости от $N(t)$; λ – средняя плодовитость особей, определяющая начальные условия для вычисления задачи Коши $w(0) = w_0, N(0) = \lambda S$; α – коэффициент квадратично зависимой (компенсационной) смертности; β – коэффициент декомпенсационной смертности; $k \in [1, 2]$ интервал уязвимости $t \in [0, T]$ специфичен для всех видов. В некоторых экстремальных случаях зависит от уровня половодья, а у насекомых $[0, T]$ – от погодных условий. При незначительном количестве повторно размножающихся особей численно из (2) вычисляем $S = N(T)$. Учет повторного размножения приведет к формированию вектор-столбца нерестующих поколений и расчету начальных условий:

$$N(0) = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_i S_i.$$

Для случая модели инвазии насекомых выберем другой триггерный функционал:

$$\Theta(S) = 1 + \exp(-cS^2), \lim_{S \rightarrow \infty} \Theta(S) \rightarrow 1.$$

Данная быстро убывающая функция отражает действие известного эффекта агрегированной группы. Рассмотрена ситуация, когда чужеродные опасные вредители, проникшие в новый ареал, генерируют локальную вспышку при переходе критического порога их численности [1]. Высокая активность тогда проявляется в форме повторяющихся пиков [2]. Для модели предложена вычислительная система – предикативно переопределяемая гибридная структура уравнений с запаздыванием. Модель исследуется при представлении вычислительного сценария с набором параметров, начальных значений и алгоритмом выработки решений об изменении воздействия для дискретного времени. С использованием вычислительных экспериментов можно описывать реальный сценарий исхода для ситуации, который приводит к коллапсу биофизическую систему при контролируемом уровне воздействия. Модельный сценарий в нашей работе [3] задает логику принятия управленческих решений по изменению уровня внешнего давления на естественную популяцию у медленно размножающегося вида. Показано в результате моделирования, что переход процесса в колебательный режим приво-

дит к выбору рискованного режима управления. Установлено, что динамика реальных водных популяций имеет точку порогового сокращения эффективности восполнения биоресурсов, которую невозможно предсказывать заранее по данным статистики.

Несоответствие сценариев хаотизации для моделей экодинамики. Пусть информация о популяционных процессах для конкретной экосистемы имеется и ставится задача разработки модели, обладающей прогностическими возможностями. Данных для построения модели недостаточно, необходимо биологическое обоснование для формализации исследуемого природного процесса. Существует множество классификаций моделей, но именно лежащее в основе математической модели теоретическое обоснование с точки зрения предметной области позволит нам классифицировать и сравнивать модели, а главное принципиально их модернизировать. Результаты исследования модели обязаны получить обоснование в рамках биологической проблематики.

Если имеются данные и уже существует модель, разработанная на основе каких-то представлений о причинно-следственных связях в развитии процесса, то возникает задача настройки модели согласно имеющимся данным. Однако данные [4] были получены об объекте, находящемся в определенном состоянии. Если объект не лабораторная популяция и мы не можем произвольно управлять её состоянием, то хорошо бы точно знать тип состояния, в котором находился объект, о котором собрана статистика. В работе [5] для промысловых популяций лососевых рыб в реках Канады У. Рикер предложил экспоненциальную функцию эффективности воспроизводства:

$$f(S) = aS \exp(-bS). \quad (3)$$

Для анализа данных наблюдений за промысловом ученые логарифмировали функцию (3) следующим образом:

$$\ln R - \ln S = \ln a - bS, \quad (4)$$

и далее строили кривую с использованием регрессии $\ln R/S$ на S для геометрической и арифметической средней для норвежской трески, но ни одна из линий регрессии не отвечает опытным данным. Популяция под воздействием важного фактора переместилась из устойчивого стационарного состояния в неустойчивое состояние и потом резко деградировала. Статистика собиралась о популяции, рассматриваемой как есте-

ственная динамическая система, находящейся в различных режимах существования. Динамика системы, по имеющимся данным, в строгом смысле аperiodическая. Зависимость обладает единственной стационарной точкой, которая должна быть устойчивой для отображения. Колебаний с большой амплитудой статистическая модель не может предвидеть, так как точки должны были бы группироваться в радиусе от пересечения с биссектрисой координатного угла.

В работе [6] мы упомянули изменения поведения модели (3), но в действительности эти свойства относятся к целому классу дискретных отображений. Данные об исследуемой популяции лосося заставляют усомниться, что для нее существует унимодальная зависимость пополнения и запаса. Так, динамика точек не характерна для подобного класса отображений в случае образования хаотического аттрактора. Эволюция диссипативной динамической системы во времени представляется движением точек в фазовом пространстве к аттрактору, подмножеству фазового пространства $A \subseteq M$, которое будет инвариантно функции эволюции: $\psi^{(t)}(A) = A$ для всех $t \in T$ и существует в окрестности U множества A , в которой для всех $y \in U$ выполняется асимптотическое равенство: $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(t)}(y) \rightarrow A$.

Для дискретных динамических систем классифицируют три топологические разновидности аттракторов [7]. Регулярным аттрактором для отображения интервала $\psi: I \rightarrow I$ считается состояние равновесия с неподвижной точкой x^* : $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(t)}(y) = x^*$ и устойчивый цикл, соответствующий режиму периодических автоколебаний. Для популяционной модели итераций $x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}$, помимо хорошо известного каскада удвоений по теории Коллета – Экмана [8], наблюдаем серию касательных бифуркаций с появлением устойчивых циклов периодов $p \neq 2^i$ при последовательном увеличении начиная с $a_1 = e^2$. Ли и Йорк показали, что если одномерное отображение $R_{j+1} = \psi(R_j)$ при значении параметра $a = \hat{a}$ имеет цикл периода $p = 3$ то оно при \hat{a} имеет при $a = \hat{a}$ и бесконечное множество циклов всех других периодов. Утверждение «период три означает хаос» позволило дать определение понятию хаоса.

Ранее в 1964 г. А.Н. Шарковский [9] доказал, что если одномерное отображение $\psi: I \rightarrow I$ имеет цикл $p = n$, то $\psi: I \rightarrow I$ также имеет циклы со всевозможными периодами \tilde{n}_i , предшествующими числу $p = n \in Z^+$ среди целых чисел, выписанных

в специальном порядке, который завершает число три. Единственный недостаток работы состоит в том, что в теореме Шарковского ничего не говорится об устойчивости приведенных в его порядке циклов. Параметрический диапазон окон периодичности нечетных циклов на бифуркационных диаграммах шире: нечетные числа завершают порядок Шарковского. Появлению окон с циклами нечетного периода из порядка Шарковского предшествует явление «перемежаемости» (intermittency). Перемежаемостью считается режим чередования во времени почти регулярных колебаний (ламинарная фаза) с интервалами хаотического поведения (турбулентная фаза). Перед появлением циклических точек график третьей итерации функции $f^3(S) \equiv f(f(f(S)))$ образует узкие каналы, по которым в строгой последовательности траектория движется довольно долго, но потом вырывается краткими всплесками нерегулярных перемещений [10].

Действие эффекта агрегированной группы в моделях инвазий. Биофизические модели в природопользовании, не учитывающие эффект агрегированной группы [11–12] (или фактор наличия критической низкой численности сообщества [13]), практически выходят за рамки возможности интерпретации результатов моделирования в экологии [14]. Есть ряд других примеров, где принципы экологии не согласуются со свойствами математического аппарата. Известно, что чем больше видов в экосистеме, тем она стабильнее [15]. Это означает, что система способна продолжительное время сохранять неизменным свое состояние. Но при увеличении размерности фазового пространства математических моделей только усложняется возможность поведения траектории [16]. В моделях систем, описываемых тремя дифференциальными уравнениями возможно возникновение странных хаотических аттракторов. Для описания эффекта группы А.Д. Базыкиным [17] установлено наличие критической численности – неустойчивого L-порога у инвазивных сообществ:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) (N(t) - L), \quad (6)$$

$$\forall 0 < N < L, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0,$$

где параметры r – репродуктивный потенциал, K – емкость экологической ниши (неразрушающая численность заполнения для среды) аналогичны

модели Ферхюльста – Пирла. В прошлом проекте разработана [18] модификация модели (6) с L -порогом $\sqrt[3]{(N(t) - L)}$ с целью сузить область проявления эффекта агрегированной инвазионной группы:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N(t)}{K + cN(t)/L} \right) \times \sqrt[3]{(N(t) - L)}. \quad (7)$$

Заключение. Задачи регулирования биофизических процессов становятся только сложнее из-за непредвиденных возмущений, потому актуально развитие вычислительных методов анализа нелинейности ситуаций с описанием логики воздействия. Эволюционно сложившиеся долгие режимы функционирования трофических цепей, к которым относятся регулярные циклы популяций, разрушаются без поддержания видового разнообразия [19]. Избыточная эксплуатация ценных популяций нарушает регуляторные механизмы, поддерживающие баланс соотношения видов, что приводит к занятию экологической ниши агрессивными вредными вселенцами [20], не имеющими врагов.

Положение экстремумов относительно стационарных точек – важная характеристика для динамики, так как положение каждой точки и их количество влияет на характер границ областей притяжения аттракторов и возникновения альтернативных притягивающих циклов. Для сценариев перехода к аperiodической динамике и обратно к регулярному движению еще не разработано обобщенного строго математического описания.

Из-за ошибок при оптимизации возникает явление структурного коллапса, которое нужно своевременно определять по характерным признакам. Оптимизация, согласно теории максимального поддерживаемого изъятия, реализуемого в течение неопределенного периода времени, в практике ее применения и для популяций, и для экономики регионов несет риск. Коллапс запасов означает долгую остановку промысла и депрессию отрасли экономики. Регулируемый промысел достаточно часто ведет к неожиданной деградации биоресурсов. Математически это отражается случаем, когда неустойчивое равновесие в модели представляется точкой-репеллером. В экологической реальности это размытая область, а не точка. В этой области положение функции над или под биссектрисой графика кривой воспроизводства популяции имеет вероятностный характер [21].

Вероятность превышения плавно убывает, но оставляет ненулевые шансы на восстановление запасов при отсутствии промысла за счет сохранности локальных форм, менее подверженных промысловой смертности на миграционных путях. Сложность управления биосистемами при неопределенности скрыта в той особенности вос-

приятия наблюдений, при которой кризисные ситуации разнообразны в ключевых признаках и вызываются часто факторами гидрологии. Примеры моделей показаны в исследованиях А.В. Никитиной из ДГТУ [22] для анализа воздействия инвазивной биоты, поражающей эндемичные биосистемы Азовского и Каспийского морей.

Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 23-21-00339 (в СПб ФИЦ РАН).

Список литературы

1. *Perevaryukha A.Y.* Modeling of a crisis in the biophysical process by the method of predicative hybrid structures // *Technical Physics*. 2022. No. 6. P. 523–532.
2. *Robeva R., Murrugarra D.* The spruce budworm and forest: a qualitative comparison of ODE and Boolean models // *Letters in Biomathematics*. 2016. Vol. 3. Iss. 1. P. 72–92.
3. *Perevaryukha A.Y.* Hybrid model of the collapse of the commercial crab *Paralithodes camtschaticus* (Decapoda, Lithodidae) population of The Kodiak Archipelago // *Biophysics*. 2022. Vol. 67. No. 2. P. 300–319. DOI: 10.1134/S0006350922020166
4. *Kriksunov E.A., Snetkov M.A.* Model of the formation of the replenishment of spawning herd taking into account the weight growth of fish // *Doklady AN SSSR*. 1980. Vol. 253. P. 759–761.
5. *Ricker W.* Stock and recruitment // *Journal Fisheries research board of Canada*. 1954. No. 11. P. 559–623.
6. *Perevaryukha A.Y.* A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics // *Entomological Review*. 2015. Vol. 95. No. 3. P. 397–405.
7. *Guckenheimer J.* Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps // *Communication Mathematical Physics*. 1979. Vol. 70. P. 133–160.
8. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D*. 1983. Vol. 7. No. 1–3. P. 16–39. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90112-4
9. *Sharkovskii A.N.* Coexistence cycles of continuous map of the line into itself // *International Journal of Bifurcation & Chaos*. 1995. Vol. 5. P. 1263–1273.
10. *Mikhailov V.V., Spesivtsev A.V., Perevaryukha A.Y.* Evaluation of the dynamics of phytomass in the tundra zone using a fuzzy-opportunity approach // *Studies in Computational Intelligence*. 2020. Vol. 868. P. 449–454. DOI: 10.1007/978-3-030-32258-8_53
11. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // *SIAM Journal of Applied Math*. 1978. No. 35. P. 260–268.
12. *Krebs C.J.* Population Cycles in Small Mammals // *Advances in Ecological Research*. 1974. Vol. 8. P. 267–399
13. *Royama T.* Analysis of spruce budworm outbreak cycles in New Brunswick, Canada, since 1952 // *Ecology*. 2005. Vol. 86. P. 1212–1224.
14. *Perevaryukha A.Y.* A continuous model for oscillating outbreaks of the population of a phytophagous moth, the tent caterpillar, *Malacosoma disstria* (Lepidoptera, Lasiocampidae) // *Biophysics*. 2020. Vol. 65. No. 1. P. 118–130. DOI: 10.1134/S0006350920010169
15. *Courchamp F., Ludek B., Gascoigne J.* Allee Effects in Ecology and Conservation. Oxford University Press, New York, 2008. 266 p.
16. *Kriksunov E.A.* Theory of recruitment and interpretation of fish population dynamics // *Journal of Ichthyology*. 1995. Vol. 35. No. 7. P. 10–37.
17. *Bazykin A.D.* Nonlinear dynamics of interacting populations. Singapore: World Scientific, 1998.
18. *Perevaryukha A.Y.* A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors // *Biophysics*. 2021. Vol. 66. No. 2. P. 327–348. DOI: 10.1134/S0006350921020160
19. *Veshchev P.V., Guteneva G.I.* Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions // *Russian Journal of Ecology*. 2012. Vol. 43. No. 2. P. 142–147. DOI: 10.1134/S1067413612020154
20. *Perevaryukha Y.N., Geraskin P.P., Perevaryukha T.Y.* Comparative immunochemical analysis of intraspecies distinctions of serum proteins of starved sturgeon *Acipenser stellatus* (Acipenseriformes, Acipenseridae) from the Caspian Basin // *Journal of Ichthyology*. 2011. Vol. 51. No. 5. P. 392–397. DOI: 10.1134/S003294521103009X
21. *Dubrovskaya V.A.* On the validity criteria for the analysis of nonlinear effects in models of exploited populations // *Problems of mechanics and control: Nonlinear dynamic systems*. 2016. No. 48. P. 74–83.
22. *Nikitina A.V., Sukhinov A.I., Ugolnitsky G.A., Usov A.B., Chistyakov A.E., Puchkin M.V., Semenov I.S.* Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov Sea // *Mathematical models and computer simulations*. 2017. Vol. 9. P. 101–107. DOI: 10.1134/S2070048217010112

DESCRIPTIVE TOOLS FOR NONLINEAR EFFECTS OF HYBRID SYSTEMS IN MODELING AGGRESSIVE INVASIONS

A.Yu. Perevaryukha, V.V. Mikhailov, I.V. Trofimova

St. Petersburg Federal Research Center of RAS
temp_elf@mail.ru, mwwcari@mail.ru, ivsoloveva@mail.ru

Abstract. The little-studied problem of the essential interpretability of the behavior of a class of computational models that are used to predict invasions of alien species is discussed. The problem of creating a consistent method of computational modeling for ecological processes with stages and critical transformations is solved. Such models have a variety of behavior with the appearance of bifurcations, the appearance of even and odd cycles, and in the limit of complication of cyclic behavior by the chaotization of the trajectory. In ecodynamics, the coexistence of non-linear effects turns out to be contradictory. When predicting the dynamics of invasive processes, taking into account the regulatory impact, iterative models generate unnecessary nonlinear modes of behavior. We substantiated that the bifurcations connected in one scenario have no explanation in ecological reality and are not reflected in the observed invasive processes. The developed hybrid models of the life cycle with stages of development fit into the criteria proposed by us for essential interpretation in ecology and prediction of invasive processes in biosystems, which is typical for invasions in the Caspian Sea.

Keywords: dynamic models of biophysical processes; Feigenbaum's theory of universality and group renormalization; variable rates of development and growth; alternative attractors; complex dynamic processes, impact regulation for biosystems, hybrid computing systems, cascades of bifurcations, chaotization, parametric ranges, theory of essential interpretation.

References

1. Perevaryukha A.Y. Modeling of a Crisis in the Biophysical process by the method of predicative hybrid structures. *Technical Physics*. 2022. N 6. P. 523–532.
2. Robeva R., Murrugarra D. The spruce budworm and forest: a qualitative comparison of ODE and Boolean models. *Letters in Biomathematics*. 2016. Vol. 3. Iss. 1. P. 72–92.
3. Perevaryukha A.Y. Hybrid model of the collapse of the commercial crab *Paralithodes camtschaticus* (Decapoda, Lithodidae) population of The Kodiak Archipelago. *Biophysics*. 2022. Vol. 67. No. 2. P. 300–319.
4. Kriksunov E.A., Snetkov M.A. Model of the formation of the replenishment of spawning herd taking into account the weight growth of fish. *Doklady AN SSSR*. 1980. Vol. 253. P. 759–761.
5. Ricker W. Stock and recruitment. *Journal Fisheries research board of Canada*. 1954. No. 11. P. 559–623.
6. Perevaryukha A.Y. A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics. *Entomological Review*. 2015. Vol. 95. No. 3. P. 397–405.
7. Guckenheimer J. Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps. *Comm. Mathem. Physics*. 1979. Vol. 70. P. 133–160.
8. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D*. 1983. Vol. 7. No. 1–3. P. 16–39.
9. Sharkovskii A.N. Coexistence cycles of continuous map of the line into itself. *International Journal of Bifurcation & Chaos*. 1995. Vol. 5. P. 1263–1273.
10. Mikhailov V.V., Spesivtsev A.V., Perevaryukha A.Y. Evaluation of the dynamics of phytomass in the tundra zone using a fuzzy-opportunity approach. *Studies in Computational Intelligence*. 2020. Vol. 868. P. 449–454.
11. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval. *SIAM Journal of Applied Math*. 1978. No. 35. P. 260–268.
12. Krebs C.J. Population Cycles in Small Mammals. *Advances in Ecological Research*. 1974. Vol. 8. *Ecology*. 2005. Vol. 86. P. 1212–1224.
13. Royama T. Analysis of spruce budworm outbreak cycles in New Brunswick, Canada, since 1952. *Ecology*. 2005. Vol. 86. P. 1212–1224.
14. Perevaryukha A.Y. A continuous model for oscillating outbreaks of the population of a phytophagous moth, the tent caterpillar, *Malacosoma disstria* (Lepidoptera, Lasiocampidae). *Biophysics*. 2020. Vol. 65. No. 1. P. 118–130.
15. Courchamp F., Ludek B., Gascoigne J. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, New York, 2008. 266 p.
16. Kriksunov E.A. Theory of recruitment and interpretation of fish population dynamics. *Journal of Ichthyology*. 1995. Vol. 35. No. 7. P. 10–37.
17. Bazykin A.D. *Nonlinear dynamics of interacting populations*. Singapore: World Scientific. 1998.
18. Perevaryukha A.Y. A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors. *Biophysics*. 2021. Vol. 66. No. 2. P. 327–348.
19. Veshchev P.V., Guteneva G.I. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions. *Russian Journal of Ecology*. 2012. Vol. 43. No. 2. P. 142–147.
20. Perevaryukha Y.N., Geraskin P.P., Perevaryukha T.Y. Comparative immunochemical analysis of intraspecies distinctions of serum proteins of starred sturgeon *Acipenser stellatus* (Acipenseriformes, Acipenseridae) from the Caspian basin. *Journal of Ichthyology*. 2011. Vol. 51. No. 5. P. 392–397.
21. Dubrovskaya V.A. On the validity criteria for the analysis of nonlinear effects in models of exploited populations. *Problems of mechanics and control: Nonlinear dynamic systems*. 2016. No. 48. P. 74–83.
22. Nikitina A.V., Sukhinov A.I., Ugolnitsky G.A., Usov A.B., Chistyakov A.E., Puchkin M.V., Semenov I.S. Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov Sea. *Math. Mod. & Comp. Simul*. 2017. Vol. 9. P. 101–107.